Geometría en una retícula

Pascual Jara
Alumnos Estalmat-Andalucía

30 de junio de 2009

.

Introducción

El uso de una retícula cuadrada (el nombre técnico es *ortométrica*) permite desarrollar muchas actividades en las que la geometría, la aritmética, la visión espacial, la combinatoria, etc., juegan un papel fundamental. Vamos a hacer una descripción de posibles actividades que se pueden hacer sobre una retícula.

Comenzamos por un desarrollo geométrico-combinatorio: el recubrimiento del plano con figuras reticulares, de esta forma se obtiene los xyminos: monominos, diminos, triminos, etc. Utilizamos estos para dar una primera aproximación al cálculo del área utilizando invariantes de las figuras reticulares.

Seguimos por una aproximación lúdica a la retícula cuadrada para familiarizarnos con el uso de la misma; se aprovecha para plantear problemas de cálculo inmediato y plantear la realización de juegos.

Fijamos la parte más destacable del proyecto, el estudio y análisis del Teorema de Pick y algunas de sus aplicaciones, en este caso al estudio de la longitud del cordon de los zapatos y el Stomachion un juego ya utilizado por Arquímedes. Terminamos el proyecto estudiando las circunferencias en una retícula y sus aplicaciones al estudio de problemas clásicos (Teorema de Fermat).

Este proyecto ha sido desarrollado en colaboración con los alumnos del proyecto Estalmat-Andalucía.

Introduction

The use of a square grid allows to develop many activities in the school in which geometry, arithmetic, spacial vision, the combinatorics, etc., play a key role. We will make a description of possible activities that can be done on such a grid.

We began by developing a geometric-combinatorial one: the covering of the plane by reticular figures. In the way we get the xyminos: monominos, diminos, triminos, etc. We use them to make a first approach to the computation of the area of reticular figures finding some invariants. We apply to a playful approach to the grid square in order to become students familiar with using it. It is used to solve some elemental problems and games.

Set the highlight of the project, the study and analysis of Pick's theorem and some of its applications, in this case to study the length of the shoelaces and a game, the Stomachion, used by Archimedes. The project finishes with the study of circles in a grid and its applications to the study of classical arithmetical problems (Fermat's Theorem).

This project has been developed in collaboration with students of the project Estalmat-Andalucía.

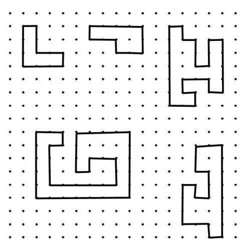
Índice general

Capítulo 1

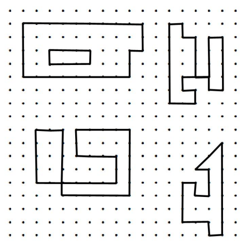
Recubrimientos del plano con figuras reticulares

Llamaremos *figura reticular* a aquella que está compuesta por cuadrados unitarios de la retícula, de forma que la figura tiene un único cuadrado o bien para cada uno de los cuadrados existe otro con el que comparte un lado (lados contiguos) y de cada cuadrado se puede llegar a cualquier otro mediante un camino que solo atraviesa lados contiguos.

Ejemplos de figuras reticulares son:



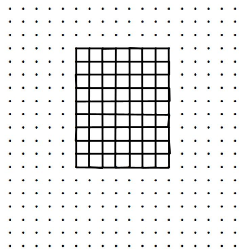
Ejemplos de figuras no reticulares son:



Veamos algunos ejemplos de figuras reticulares y estudiemos si recubren o no el plano.

Monominos

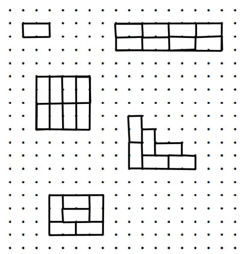
Un monomino es una figura reticular formada por un solo cuadrad unitario. Es claro que únicamente hay un monomino, y que éste recubre el plano.



Diminos

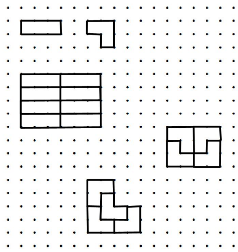
Un dimino es una figura reticular formada por dos cuadrados unitarios. Observa que hay un solo dimino, y que éste puede recubrir el plano de múltiples formas.

Algunas formas de recubrir el plano son periódicas, esto es, se repite el mismo patrón mediante traslaciones, otras en cambio son aperiódicas, esto es, no hay una figura a partir de la cual se pueda recubrir el plano mediante traslaciones.



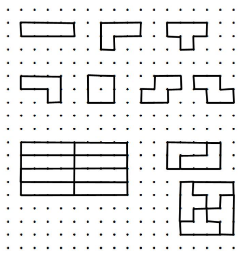
Triminos

Un trimino es una figura reticular formada por tres cuadrados unitarios. Observa que hay dos triminos, y que estos pueden recubrir el plano de forma periódica.



Cuatriminos

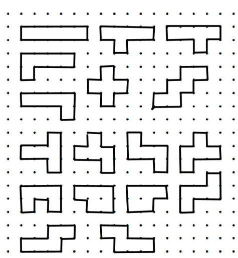
Un cuatrimino es una figura reticular formada por cuatro cuadrados unitarios. Tenemos exactamente cinco cuatriminos.



Para todos ellos se tienen recubrimientos periódicos del plano.

Pentaminos

Un pentamino es una figura geometricas formada por cinco cuadrados unitarios. Tenemos exactamente diecisiete pentaminos.



Para todos ello se tienen recubrimientos del plano. Estudia si hay alguno que no tiene recubrimientos periódicos.

Sextaminos, septaminos, etcétera

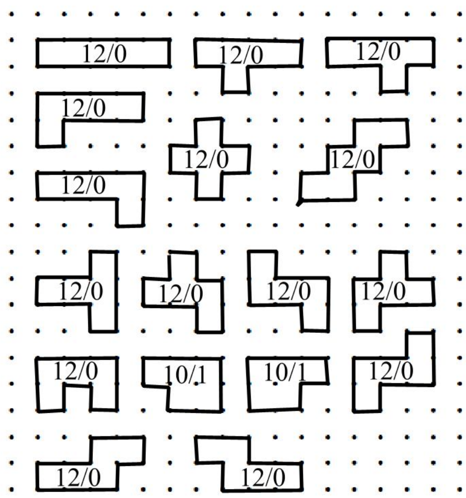
Observa que en esta actividad hemos distinguido figuras que no coinciden al hacer un giro o una traslación; y hemos considerado como distintas figuras que pueden obtener unas de otras mediante simetrías

Vamos a ver qué invariantes podemos conseguir al estudiar los pentaminos. Observa que todos ellos tienen área igual a 5, si suponemos que el cuadrado unitario tiene área igual a 1.

¿Qué otros invariantes podemos observar en los pentaminos?

Con los pocos elementos de que disponemos el que nos aparece de forma natural es el que nos proporcionan los puntos de la retícula. ¿Cuantos puntos está sobre el borde y cuántos en el interior?

Completamos la siguiente figura con estos datos, en donde x/y indica los dos datos: x, el número de puntos en el borde, e y, el número de puntos en el interior.



¿Cómo se puede obtener 5 combinando estos dos números?

Ayúdate de los monominos, diminos, triminos, cuatriminos, sextiminos, etc.

Nota 1.0.1. Cuando no hay puntos interiores parece que tenemos que dividir por dos el número de puntos del borde y restar 1 para obtener el área. En cambio, cuando hay puntos en el interior, al número obtenido como antes tenemos que sumar el número de puntos en el interior

Observa que esta regla es cierta para los xyminos que hemos consideramos. Más adelante veremos que en realidad este resultado es un Teorema sobre polígonos en una retícula.

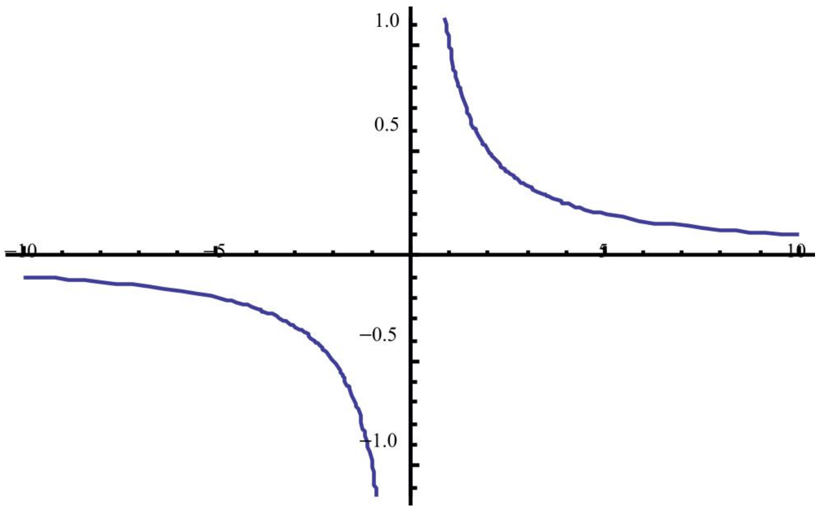
Nota 1.0.2. En general los xyminos se emplean como piezas de dominó, por lo tanto no son figuras planas, sino que tienen un volumen. Esta forma de concebir los xyminos hace que se reduzca en número de piezas consideradas, pues algunas de ellas se obtienen a partir de otras por simetría. En el caso de los pentaminos de los 17 que hemos señalado se pasa a solo 12. Determina cuáles de son éstos.

Capítulo 2

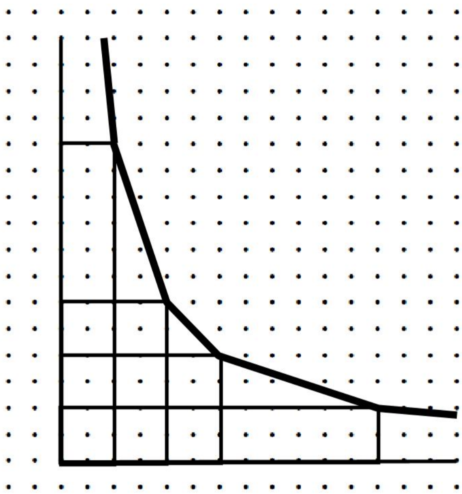
Actividades en una retícula

Una aproximación a la construcción de gráficas de funciones

La ecuación de la hipérbola $y = 1/x$ indica que cada punto (x, y) de la hipérbola verifica la relación $xy = 1$. Supongamos que consideramos la hipérbola de ecuación $y = 12/x$; es justo la anterior tras aplicar una deformación.



En una retícula podemos representar la hipérbola situada en el primer cuadrante. Para ello vamos a determinar una ejes, y sobre los mismos acomodamos rectángulos de área 12, situados en el primer cuadrante. El resultado es una aproximación a la hipérbola (por comodidad hemos utilizado el área del cuadrado unitario igual a 1/2:



Un juego para dos jugadores

El siguiente juego se puede desarrollar en una retícula. Se delimita una región cerrada de la retícula, por ejemplo un rectángulo. El modo de jugar es el siguiente:

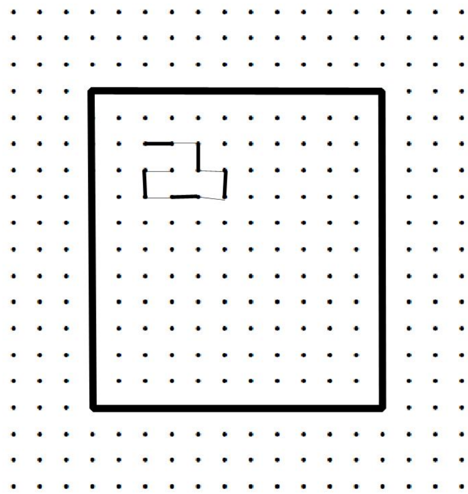
1. El primer jugador une por un segmento dos puntos de la retícula que estén contiguos en la misma fila o columna.

2. El segunda jugador elige uno de los puntos extremos y lo une con otro nuevo que esté contiguo en la misma fila o columna.

3. Por turnos cada jugador en su turno une el nuevo punto con otro nuevo que esté contiguos en la misma fila o columna.

4. Pierde el jugador que no puede realizar movimientos.

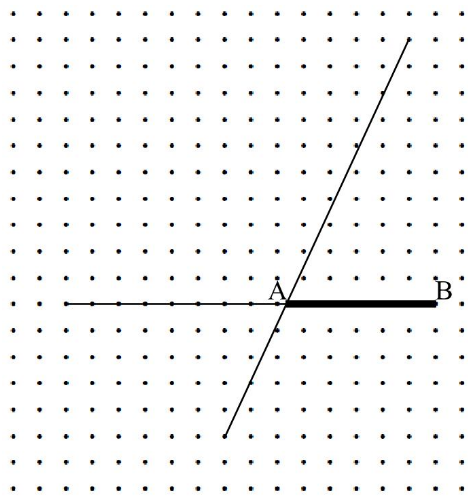
Un ejemplo de juego es el siguiente:



El objetivo de la actividad es hacer un análisis del juego. Para esto es conveniente plantear primero el juego en rectángulos cuya área se suficientemente pequeña para que nos permite desarrollar estrategias ganadoras, si las hay.

Un problema

En una retícula se tienen dos segmentos, como se indica en la figura. Dar un método para determinar la longitud $\overline{AB}$.



Muchos otros problemas y actividades pueden ser expuestas en este contexto.

Capítulo 3

El teorema de Pick

El teorema de Pick trata sobre el cálculo de área de un polígono reticulado, y expresa ésta en función del número de puntos de la retícula que están sobre el borde del polígono y el número de puntos en el interior.

Teorema 3.0.3. *Dado un polígono reticulado (sus vértices están en una retícula que puede ser considerada entera) simple P, el área $A(P)$ de P se puede calcular por la fórmula*

$$A(P) = I(P) + \frac{B(P)}{2} - 1,$$

siendo $I(P)$ el número de puntos de la retícula interiores a P y $B(P)$ el número de puntos de la retícula en la frontera o borde de P.

Hacemos una comprobación del teorema a partir de ejemplos y damos una prueba del mismo.

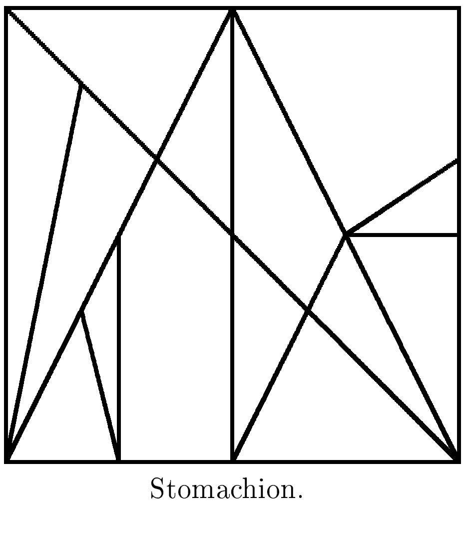
Lo aplicamos a varias situaciones. Una de ellas trata cobre la imposibilidad de dibujar ciertos polígonos regulares reticulados.

¿Qué polígonos regulares pueden dibujarse en una retícula cuadrada?

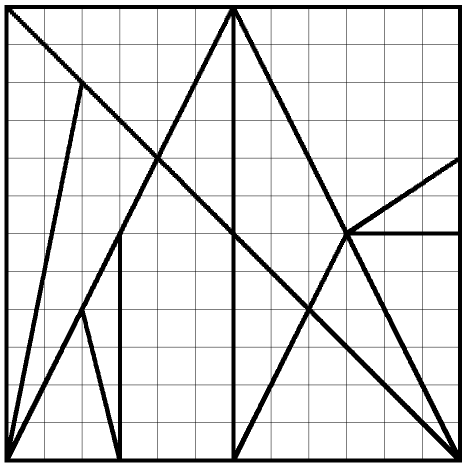
Capítulo 4

El Stomachion de Arquímedes

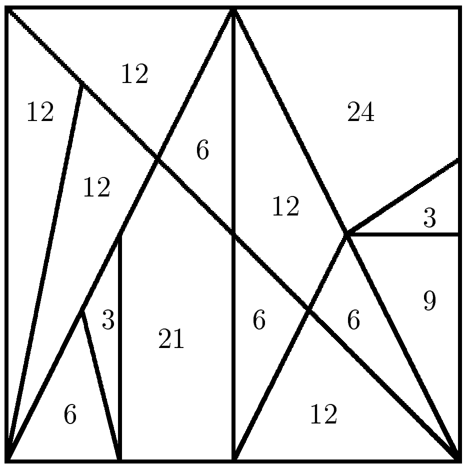
El Stomachion es un juego de combinación de formas que se atribuye a Arquímedes. Se construye sobre un cuadrado reticulado 12×12 y consta de dies piezas. El siguiente dibujo representa el Stomachion.



Stomachion.



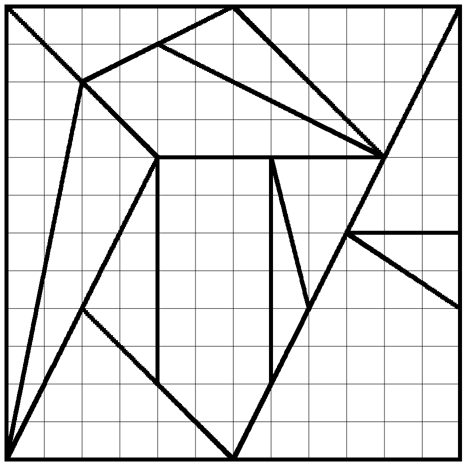
El uso de la retícula nos permite calcular el área de cada una de las piezas del Stomachion. Estas son:

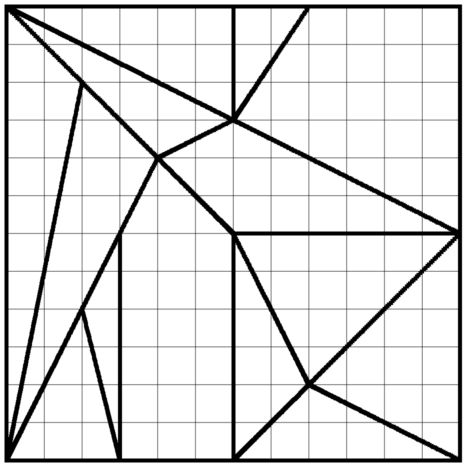


Como un juego de combinatoria que es, una de las primeras actividades que se puede hacer con el Stomachion es formar diversas figuras.

Formar cuadrados 12×12 con todas las piezas del Stomachion.

Aquí tenéis dos de esta configuraciones:





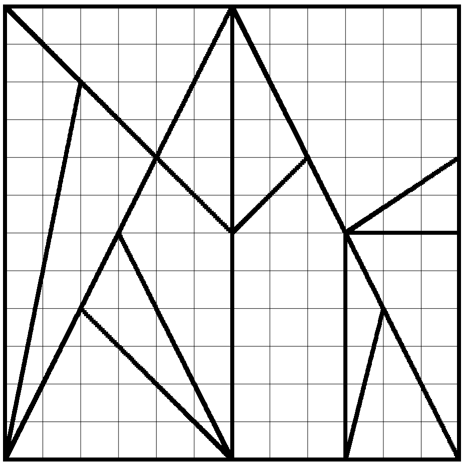
Ver Actividad (4.0.4)

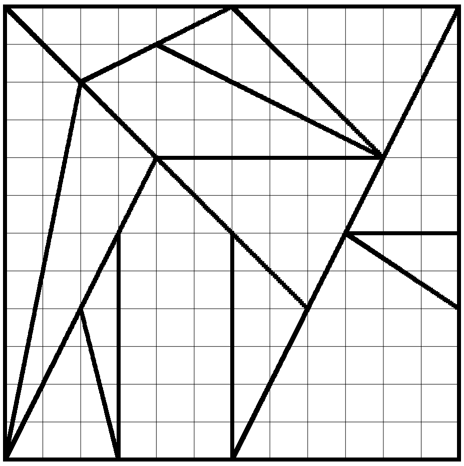
Otro de los usos de las piezas del Stomachion es el construir figuras a partir de ellas. En lo que sigue proponemos una actividad consistente en construir las figuras indicadas utilizando las piezas del Stomachion.

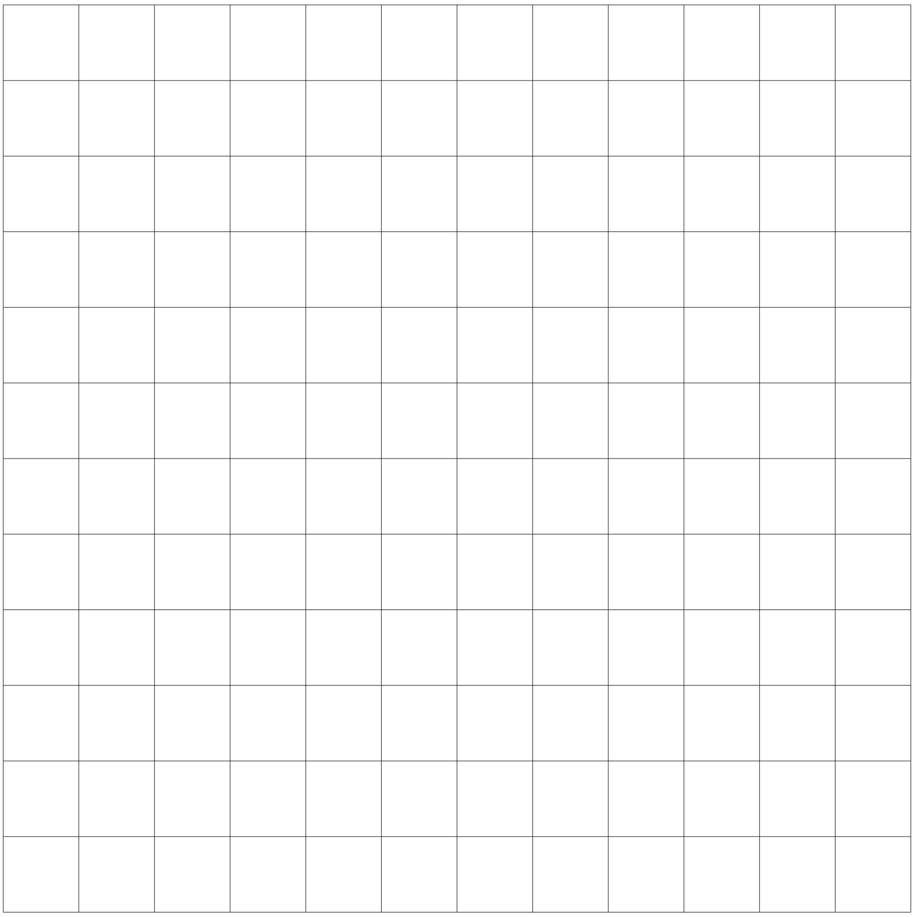
Ver Actividad (4.0.5)

Actividades

Actividad 4.0.4. Utilizar la siguiente retícula para construir un juego de Stomachion de forma que podáis completar el cuadrado de otras formas distintas. Primero presentamos dos nuevos ejemplos.

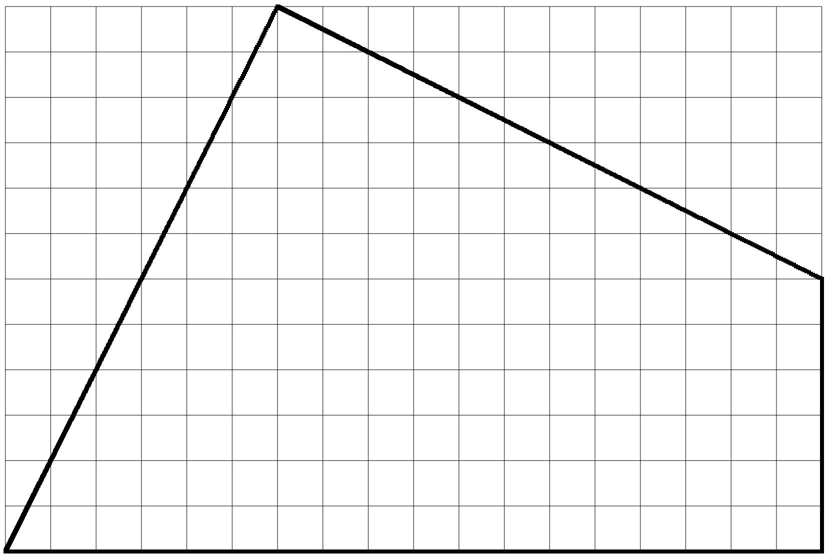




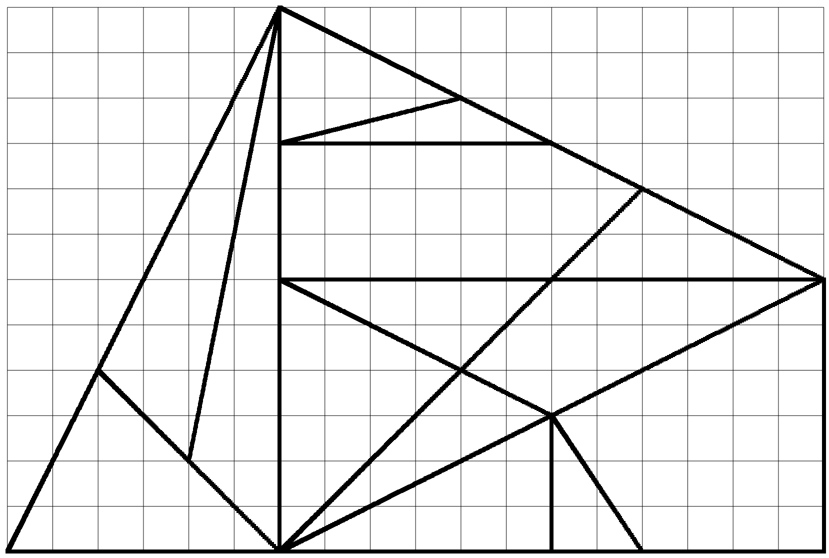


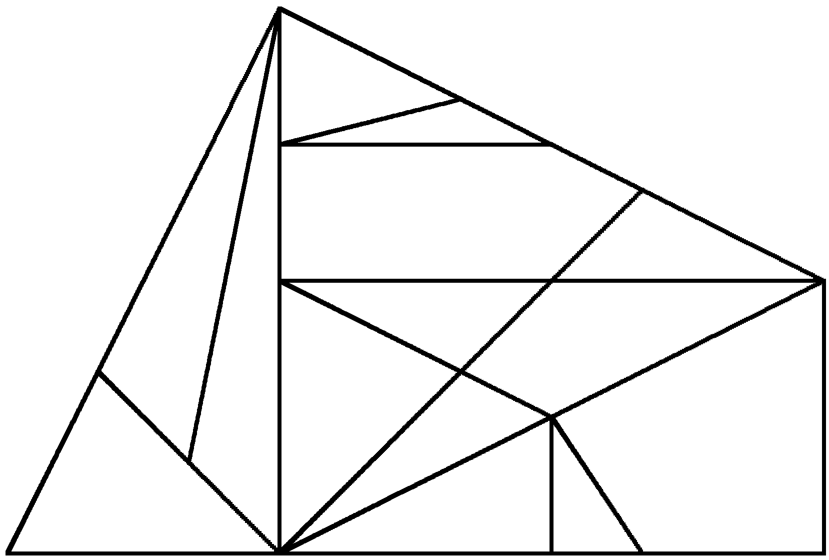
Actividad 4.0.5. A continuación presentamos algunas figuras que se pueden construir con las piezas del Stomachion. Reproducirlas con éstas piezas. Podéis diseñar otras muchas por vuestra cuenta. Utilizar la reticula libre para dibujarlas una vez construidas.

El trapecio:

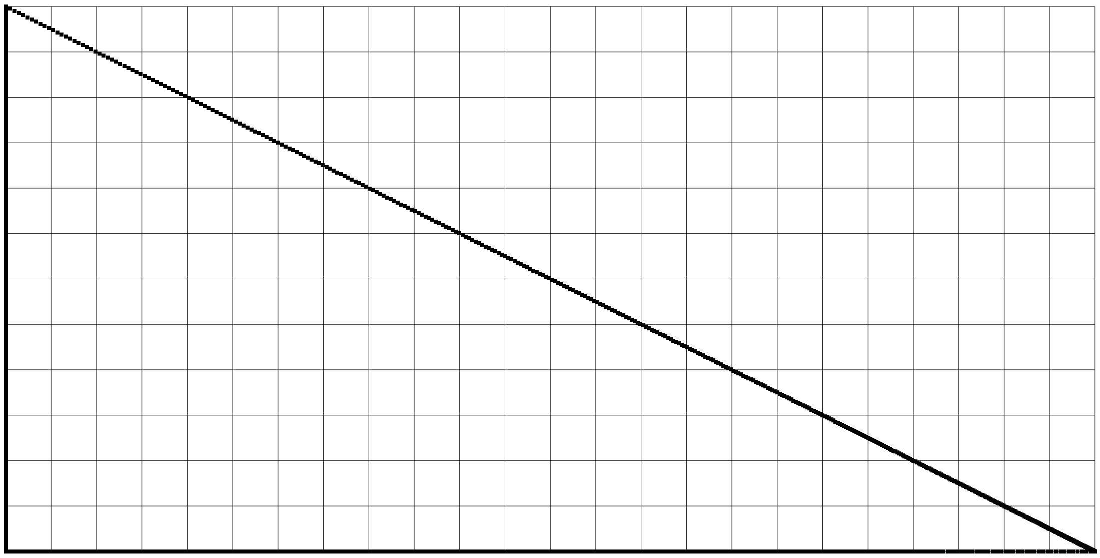


Solución:

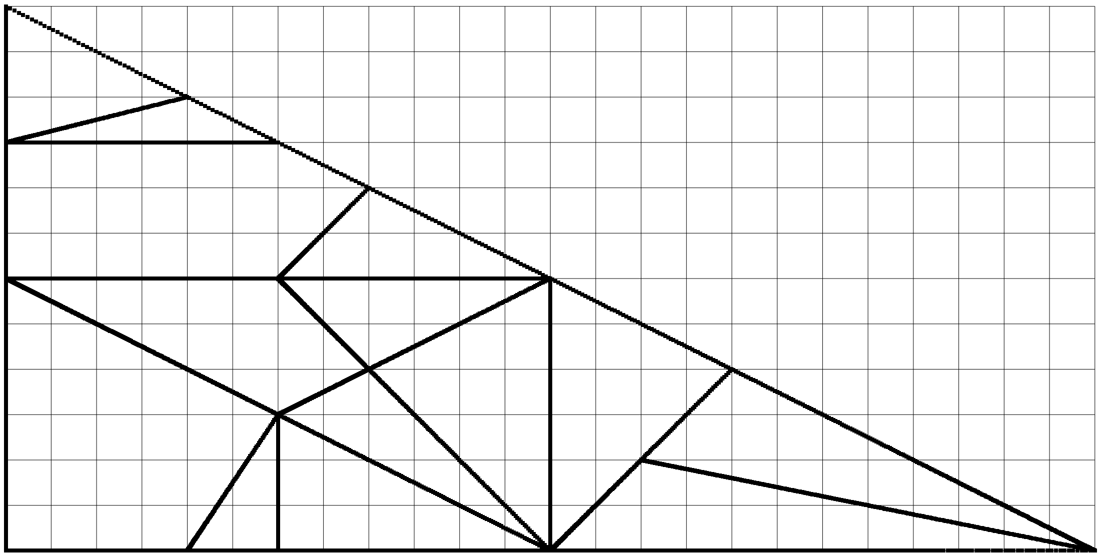


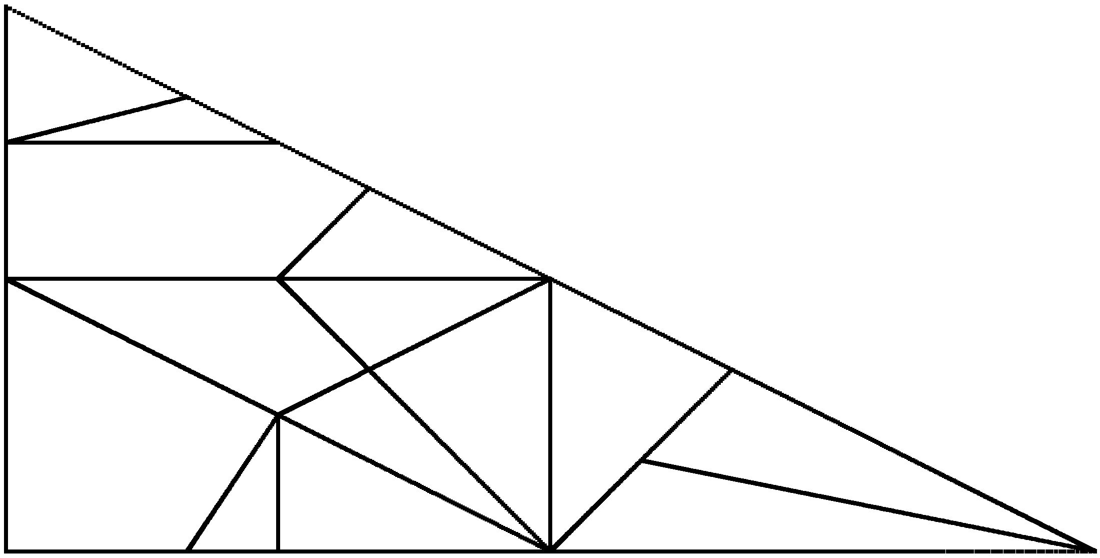


El triángulo:

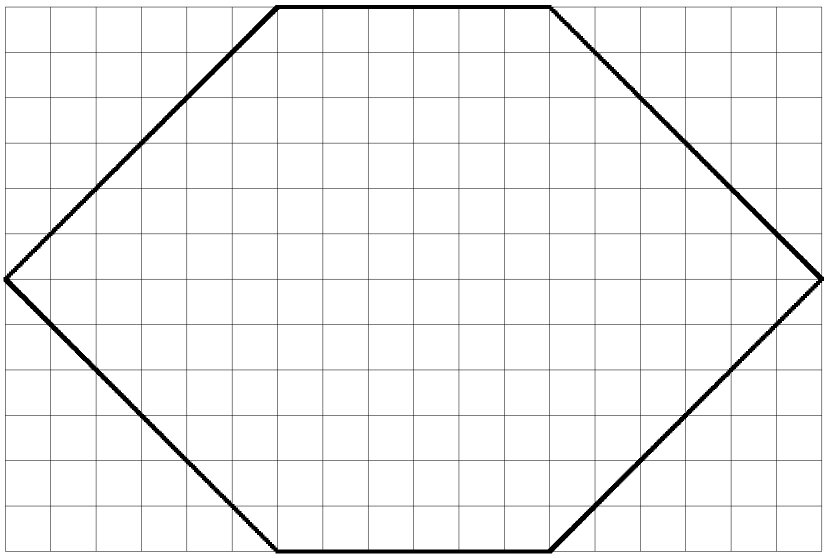


Solución:

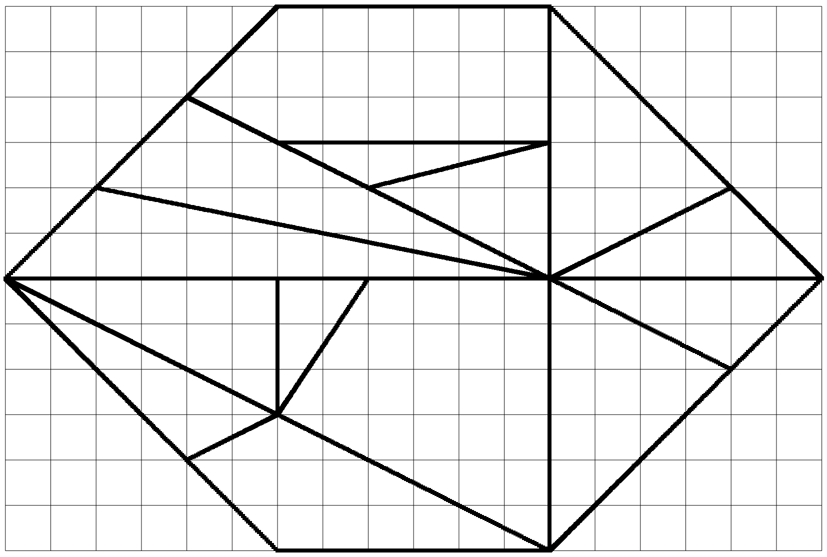


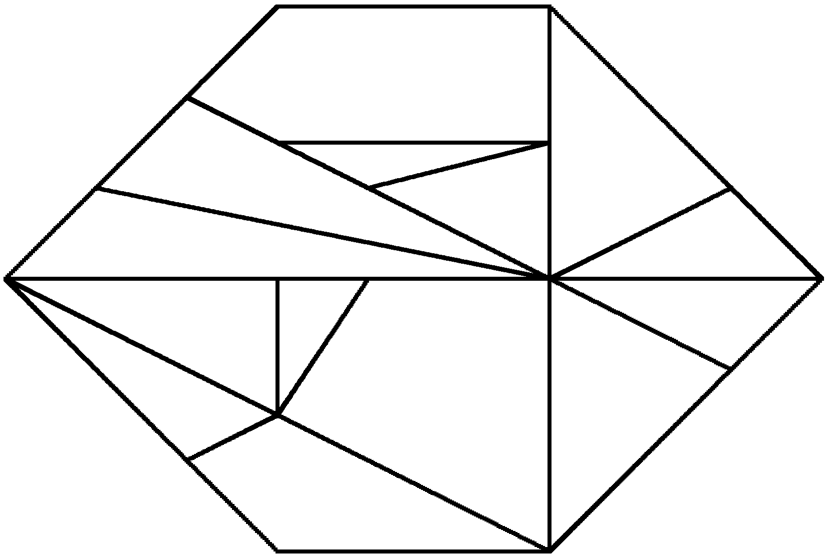


El hexágono:

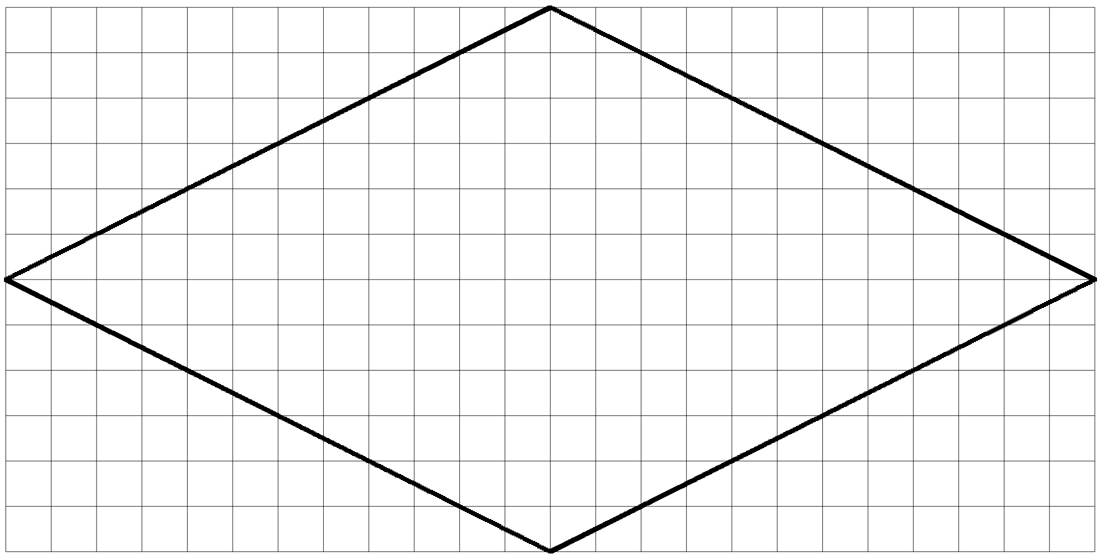


Solución:

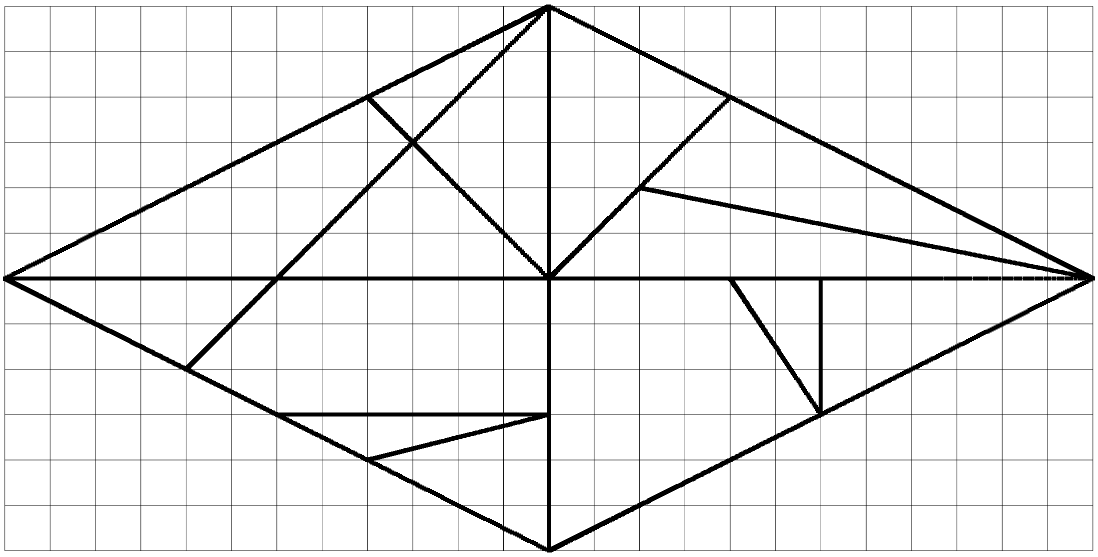


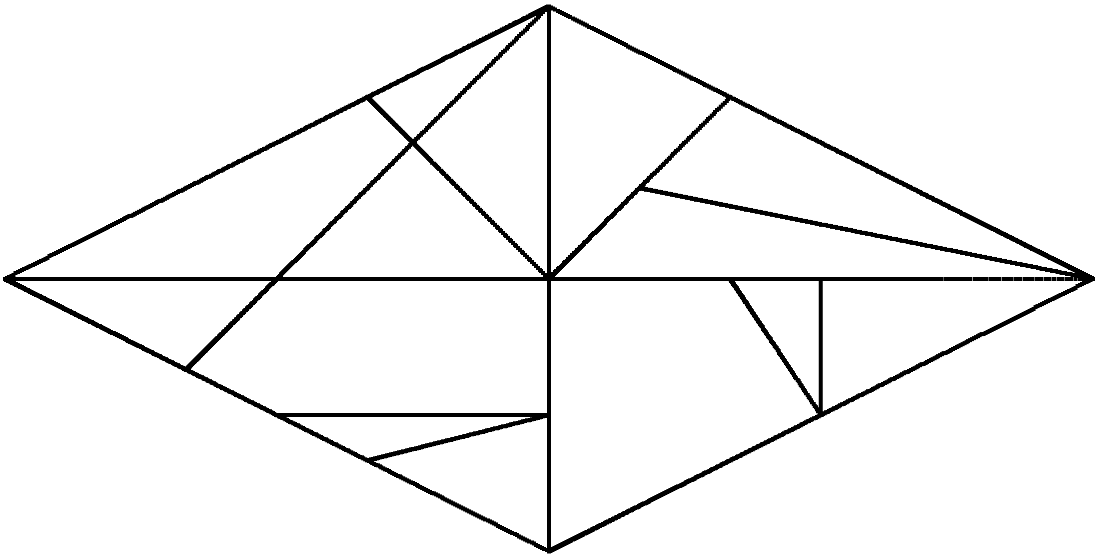


El rombo:



Solución:





Capítulo 5

Zapatero a tus zapatos

Vamos a tratar un problema en el que el uso de una retícula plana nos va a dar una solución sencilla. Se trata de determinar el modo de colocar los cordones a unos zapatos para reducir al mínimo la longitud de cordón utilizada.

Consideramos un zapato en el que observamos la puntera y los agujeros para colocar los cordones, en este caso tenemos dos columnas de seis agujeros.

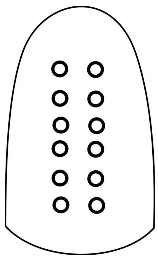


Figura 11. Zapato

Un modo de colocar los cordones en el zapato es el siguiente

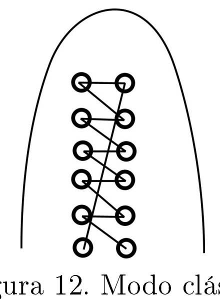


Figura 12. Modo clásico

Conocemos este modo de acordonar los zapatos, el **modo clásico**. Otra forma tradicional de acordonar los zapatos es el llamado **modo deportivo**, que presenta el siguiente aspecto.

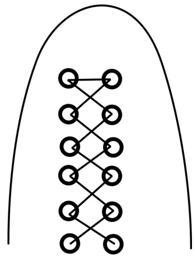


Figura 13. Modo deportivo

Observa que prescindimos del resto de cordón, pues en todos los casos el cordón sobrante tiene siempre la misma función.

Vamos a fijar el número de pares de agujeros que vamos a usar, pongamos que como en los ejemplos, este número es seis, y en general es n. Hay otros dos parámetros que son necesarios para estudiar el problema; el primo es la distancia d entre pares de agujeros, y el segundo es la distancia D entre las dos filas de agujeros.

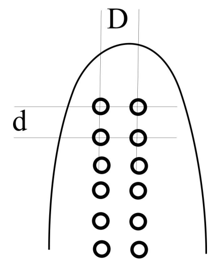


Figura 14. Parámetros

Es un problema sencillo determinar la longitud del cordon en cada uno de los encordados propuestos.

Veamos el caso de la Figura 12. Desarrollado el cordon tenemos:

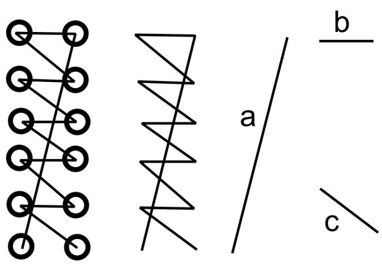


Figura 15. Modo clásico. II

De donde las longitudes a medir se reflejan en la siguiente figura:

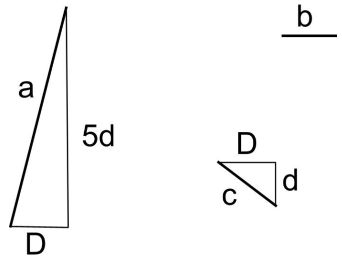


Figura 16. Modo clásico. III

En consecuencia tenemos:

$$a = \sqrt{d^5 + (5d)^2},$$
$$b = D,$$
$$c = \sqrt{D^2 + d^2}.$$

La longitud total es:

$$a + 5b + 5c = \sqrt{d^5 + (5d)^2} + 5D + \sqrt{D^2 + d^2}.$$

Para el modo deportivo podemos hacer un desarrollo similar:

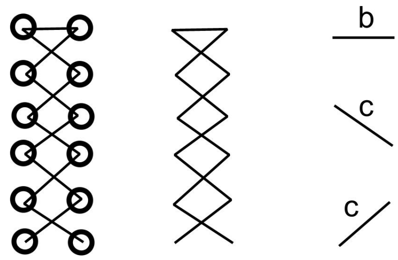


Figura 17. Modo deportivo. II

De donde las longitudes a medir se reflejan en la siguiente figura:

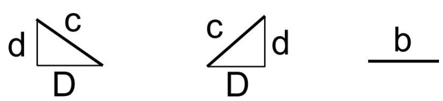


Figura 18. Modo deportivo. III

En consecuencia tenemos:

$$b = D,$$
$$c = \sqrt{D^2 + d^2}.$$

La longitud total es:

$$b + 10c = D + 10\sqrt{D^2 + d^2}.$$

¿Cómo podemos averiguar cuál de estas cantidades es la más grande?

Antes de seguir leyendo pasar a la Actividad (5.0.6).

Hacemos la diferencia:

$$\sqrt{d^5 + (5d)^2} + 5D + \sqrt{D^2 + d^2} - (D + 10\sqrt{D^2 + d^2}) = \sqrt{D^2 + (5d)^2} + 4D - 5\sqrt{D^2 + d^2}$$

Esta cantidad es positiva si se tiene

$$\sqrt{D^2 + 25d^2} + 4D > 5\sqrt{d^2 + D^2}.$$

Como en esta expresión las dos cantidades son positivas, elevando al cuadrado se mantiene la desigualdad:

$$D^2 + 25d^2 + 16D^2 + 8D\sqrt{D^2 + 25d^2} > 25(D^2 + d^2),$$

O equivalentemente

$$8D\sqrt{d^2 + 25d^2} > 8D^2.$$

Como $D \neq 0$, tenemos $\sqrt{d^2 + 25d^2} > D$, o equivalentemente $D^2 + 25d^2 > D^2$, esto es, $25d^2 > 0$, que siempre es positivo.

En consecuencia siempre se tiene la desigualdad

$$\sqrt{d^5 + (5d)^2} + 5D + \sqrt{D^2 + d^2} - (D + 10\sqrt{D^2 + d^2}) > 0,$$

y por tanto el modo clásico utiliza más cordón que el modo deportivo.

Vamos a ver un método gráfico para abordar este problema. Éste consiste en desarrollar todo el acordonado en un plano. Veamos el caso del acordonamiento en el modo clásico.

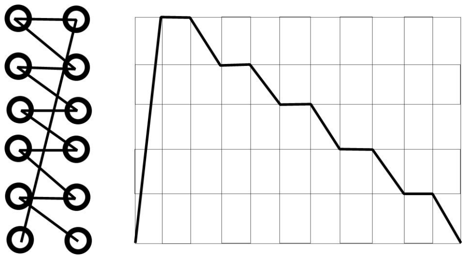


Figura 19. Modo clásico. IV

De esta forma podemos medir longitudes: la del cordon utilizado que es la línea gruesa que aparece en la retícula, y relacionarlas con las áreas que encierran junto con la línea horizontal de la base de la retícula.

Al suponer la retícula entera, esto es, $D = d$, el área que encierra esta línea, por el teorema de Pick, es:

$$I = 20. \quad B = 22. \quad \text{Área} = 20 + \frac{22}{2} - 1 = 30.$$

¿Qué ocurre con el acordonamiento según el modo deportivo. En este caso tenemos:

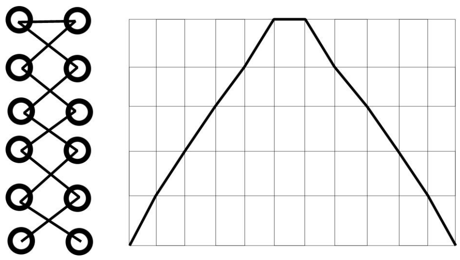


Figura 20. Modo deportivo. IV

El área que encierra esta figura es:

$$I = 20. \quad B = 22. \quad \text{Área} = 20 + \frac{22}{2} - 1 = 30.$$

Tenemos que los dos polígonos encierran el mismo área, sin embargo sus perímetros son diferentes.

Comentario.
Comentar sobre la fórmula de Herón que relaciona el área de un triángulo y el perímetro del mismo. Este resultado no es cierto para polígonos de más de tres lados.

Ver Actividad (5.0.7).

Analicemos otros modos de acordonar un zapato. Para ello lo primero que tenemos que perfilar es qué entendemos por un **acordonado correcto**. Vamos a exigirle a un acordonado las siguientes condiciones:

1. Debe unirse cada agujero de la fila izquierda con al menos un agujero de la fila derecha y viceversa y

2. por cada agujero el cordón pasa una sola vez.

Por ejemplo en la figura siguiente, solo el acordonado (a) es correcto.

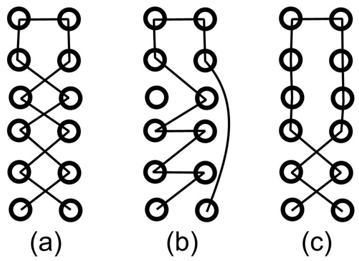


Figura 21. Ejemplos de acordonados.

Ver Actividad(5.0.8)

Nos planteamos el problema de determinar un modo de acordonar zapatos de forma que la longitud de cordón empleada sea mínima. Traducido a la retícula se trata de determinar un polígono que tenga por base la fila inferior de la retícula y que tenga exactamente dos vértices en cada fila de la retícula. Como consecuencia de estas condiciones, resulta que la longitud de la base debe ser, al menos de 5, esto es, debe involucrar al menos a seis columnas de vértices de la retícula.

Veamos un ejemplo en el que este límite se alcanza.

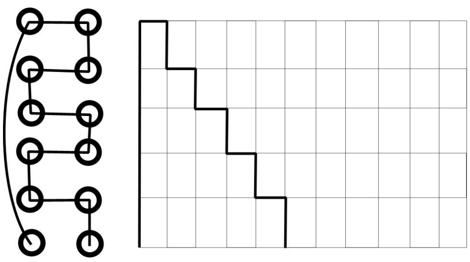


Figura 22. Acordonado 1.

Otra posible configuración es:

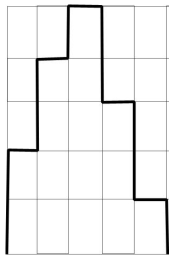


Figura 23. Acordonado 2.

No debe ser difícil de probar que cualquier otra configuración que requiera más de 6 columnas es necesariamente más larga, por lo tanto nos restringimos a considerar el caso de 6 columnas.

¿Cuántos puntos tendremos en la frontera? Contando los de la base debemos tener como mínimo 16 puntos en la frontera.

¿Cuántos puntos tendremos en el interior? Observa que en la primera fila tenemos siempre un trazo vertical, luego no hay puntos en el interior. En la segunda fila podemos no tener ninguno, en la tercera fila tendremos mínimo 1, y así sucesivamente hasta llegar a la fila quinta. En total tendremos al menos 0+0+1+2+3=6 puntos en el interior. En consecuencia el área que encierra esta línea poligonal es, como mínimo,

$$6 + \frac{16}{2} - 1 = 15.$$

Se trata pues de determinar si existe un polígono de área 15 que cumpla con las condiciones propuestas. Observa que un posible ejemplo aparece en la Figura 22.

¿Cuál es el acordonado de menor longitud? Como el cruce en diagonal, frente al doble cruce en paralelo, hace que aumente la longitud del cordon, deberíamos utilizar el menor número de cruces en diagonal.

Hacer tres cruces en diagonal nos aporta una solución que no es mínima.

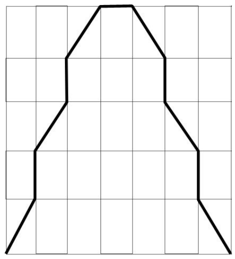


Figura 24. Acordonado 3.

como podemos apreciar al comparar con la siguiente que tiene dos cruces en diagonal.

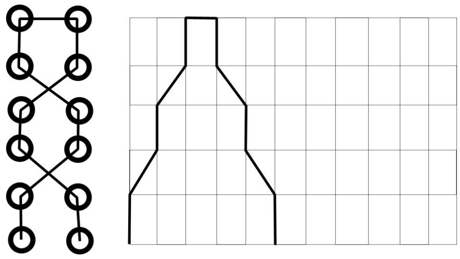


Figura 25. Acordonado 4.

Vamos a calcular las longitudes de estos dos acordonamientos suponiendo que existe la relación $D?kd$ par algún $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$.

Para el acordonado de la figura 24 la longitud es:

$$4d + D + 6\sqrt{d^2 + D^2} = 4dkd + 6d\sqrt{1 + k^2}.$$

En cambio, en el acordonamiento de la figura 25 éste es:

$$6d + D + 4\sqrt{d^2 + D^2} = 6d + kd + 4d\sqrt{1 + k^2}.$$

Restando ambos se tiene la relación $\sqrt{1 + k^2} - 1$ a favor del acordonamiento de la figura 24. Como $k > 1$, se tiene que siempre ésta es más largo.

Proponemos pues como acordonado de menor longitud el que proporciona la figura 25.

Ver Actividad (5.0.9).

Actividades

Actividad 5.0.6. De las dos formas de acordonar un zapato, ¿cuál utiliza más cordón?

Actividad 5.0.7. Recordar la fórmula de Herón que relaciona el área de un triángulo con el perímetro. Comprobar que este resultado no es cierto para cuadriláteros.

Actividad 5.0.8. Desarrolla en una retícula los acordonados de la siguiente figura.

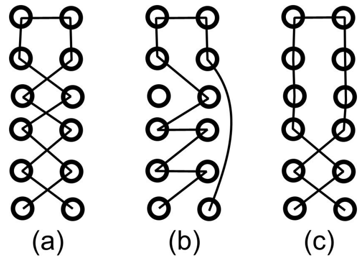


Figura 21. Ejemplos de acordonados.

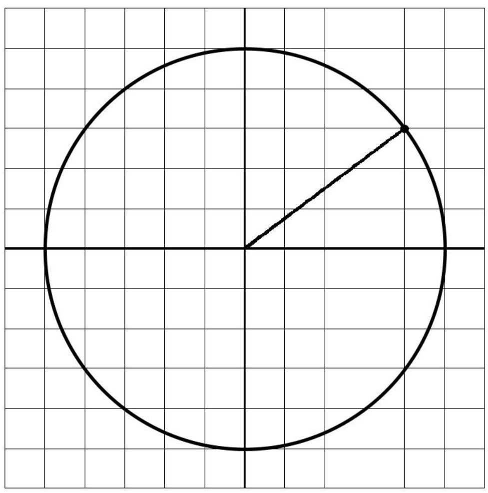
Para ello ayúdate de la siguiente retícula:

Actividad 5.0.9. Determinar el acordonamiento que utilice menor longitud de cordón para el caso de 6 agujeros en paralelo. Extender en resultado a otras configuraciones con mayor o menor número de agujeros.

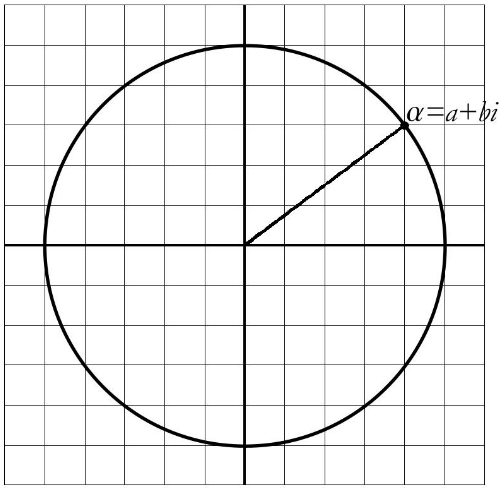
Capítulo 6

Circunferencias en una retícula

Si consideramos una retícula en el plano, estamos interesados en las circunferencias que podemos dibujar con la condición de que el centro de la circunferencia sea un punto de la retícula y que ésta pase por un punto del plano. Es evidente que podemos suponer que la circunferencia está centrada en el punto $(0, 0)$.



Si el punto tiene de coordenadas (a, b), el radio de la circunferencia es $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Para ver si un punto de coordenadas (c, d) está o no en la circunferencia, basta comprobar si $\sqrt{c^2 + d^2} = r$.



Para la resolución de este problema estudiamos los números enteros de Gauss, esto es, los números complejos con parte real y parte imaginaria entera.

Problema 6.0.10. *Determinar todos los puntos del plano que están sobre la circunferencia centrada en el punto* $(0,0)$ *que pasa por el punto* (a,b).

Solución. Es claro que tenemos que determinar todos los puntos (c,d) que verifiquen $c^2+d^2=a^2+b^2$. Vamos a utilizar la representación que de los puntos de la retícula nos proporcionan los enteros de Gauss. Así el punto de coordenadas (a,b) se representa por el entero de Gauss $\alpha = a+bi$. Un punto arbitrario de la retícula de coordenadas (c,d) que esté sobre la circunferencia se representará por el entero de Gauss $\beta = c+di$.

Tenemos pues que determinar todos los enteros de Gauss β tales que $N(\beta)=N(\alpha)$.

Llamamos $N=N(\alpha)$, y sea $N=2^{e_0}p_1^{e_1}\cdots p_s^{e_s}p_{s+1}^{2e_{s+1}}\cdots p_{s+t}^{2e_{s+t}}$ la descomposición en factores primos de N con las siguientes condiciones: los $p_i \equiv 1 \pmod 4$ si $1\leq i\leq s$ y $p_j\equiv 3 \pmod 4$ si $s+1\leq j\leq s+t$. Como N es una suma de dos cuadrados, resulta que los exponentes de los p_j son pares.

Si π es un entero de Gauss irreducible que divide a β, entonces $N(\pi)$ divide a $N=N(\alpha)$, esto es, $N(\pi)=2, p_i \mathrm{o} p_j^2$. Tenemos que contar cuantos enteros de Gauss irreducibles dividen a β; vamos a tener uno por cada uno de los siguientes factores de N: $2, p_1, \ldots, p_s, p_{s+1}^2, \ldots, p_{s+t}^2$.

El siguiente problema es ver en los conjuntos en los que varían estos elementos.

En el caso del factor primo 2, tenemos que elegir un elemento del conjunto $\{1+i, 1-i, -1+i, -1-i\}$, luego hay 4 posibilidades. Si llamamos $\pi = 1+i$, los demás son asociados a π. Si el exponente de 2 es e_0, como hay que elegir e_0 de ellos, resulta que tendremos π^{e_0} multiplicado por un elemento invertible. Las posibilidades que hay, independientemente del exponente, son 4.

En el caso del factor primo $p_i = x+yi$, tenemos que elegir un elemento del conjunto $\{x+yi, x-yi, -x+yi, -x-yi\} \cup \{y+xi, y-xi, -y+xi, -y-xi\}$, luego hay 8 posibilidades. Si llamamos $\pi = x+yi$, el primer conjunto está formado por los asociados de π, y el segundo por los asociados de $\overline{\pi}$. Si el exponente es e_i, tenemos que elegir e_i de ellos; esto lo podemos hacer de e_1+1 formas, y ahora tenemos que hacer intervenir a los elementos invertibles. En total tenemos: $4(e_1+1)$.

En el caso del factor primo p_j, tenemos que elegir un elemento del conjunto $\{p, -p, pi, -pi\}$, luego hay 4 posibilidades. Si llamamos $\pi = p$, el resto de los elementos son asociados a π. Si el exponente es e_j, com tenemos que elegir e_j de ellos, podemos tomar todos iguales a p y hacer intervenir a los elementos invertibles. En total tenemos 4.

Tenemos que el número de diferentes enteros de Gauss que están sobre la circunferencia centrada en $(0,0)$ y que pasa por el punto (a,b) es:

$$4 \times (1 \times (e_1+1) \times \cdots \times (e_s+1) \times 1 \times \cdots \times 1 = 4 \times (1 \times (e_1+1) \times \cdots \times (e_s+1)$$

ya que basta hacer el producto de los primos y adornarlos de cada uno de los elementos invertibles.

Ejemplo 6.0.11. Determinar los puntos por los que pasa la circunferencia centrada en $(0,0)$ y que pasa por el punto $(3,4)$.

Solución. Tomamos $\alpha = 3+4i$, entonces $N = 3^2+4^2 = 5^5$. Como $5 \equiv 1 \pmod 4$, y tenemos $5 = (2+i)(2-i)$, resulta que los enteros de Gauss que determina son:

$$\begin{array}{llll}
(2+i)(2+i), & -(2+i)(2+i), & i(2+i)(2+i), & -i(2+i)(2+i); \\
(2+i)(2-i), & -(2+i)(2-i), & i(2+i)(2-i), & -i(2+i)(2-i); \\
(2-i)(2-i), & -(2-i)(2-i), & i(2-i)(2-i), & -i(2-i)(2-i).
\end{array}$$

En total 12 que corresponde a $4 \times (2+1)$.

$$\begin{array}{rrrr}
3+4i, & -3-4i, & -4+3i, & 4-3i; \\
5, & -5, & 5i, & -5i; \\
3-4i, & -3+4i, & 4+3i, & -4-3i.
\end{array}$$

Los puntos son:

$$\begin{array}{rrrr}
(3,4) & (-3,-4) & (-4,3) & (4,-3) \\
(5,0) & (-5,0) & (0,5) & (0,-5) \\
(3,-4) & (-3,4) & (4,3) & (-4,-3)
\end{array}$$

Ejemplo 6.0.12. Determinar los puntos por los que pasa la circunferencia centrada en $(0,0)$ y que pasa por el punto $(27,39)$.

Solución. Llamamos $\alpha = 27+39i$; la norma de α es: $N = N(\alpha) = 27^2+39^2 = 2250$.

La factorización en primos de $N = 2250$ es: $N = 2 \times 5^3 \times 3^2$. El número de puntos de la circunferencia en la retícula es: $4 \times (3+1) = 16$. Los puntos son:

$$\begin{array}{rr}
(1+i)(2+i)(2+i)(2+i)3, & (1+i)(2+i)(2+i)(2-i)3, \\
(1+i)(2+i)(2-i)(2-i)3, & (1+i)(2-i)(2-i)(2-i)3 \\
-(1+i)(2+i)(2+i)(2+i)3, & -(1+i)(2+i)(2+i)(2-i)3, \\
-(1+i)(2+i)(2-i)(2-i)3, & -(1+i)(2-i)(2-i)(2-i)3 \\
i(1+i)(2+i)(2+i)(2+i)3, & i(1+i)(2+i)(2+i)(2-i)3, \\
i(1+i)(2+i)(2-i)(2-i)3, & i(1+i)(2-i)(2-i)(2-i)3 \\
-i(1+i)(2+i)(2+i)(2+i)3, & -i(1+i)(2+i)(2+i)(2-i)3, \\
-i(1+i)(2+i)(2-i)(2-i)3, & -i(1+i)(2-i)(2-i)(2-i)3
\end{array}$$

que son:

$$\begin{array}{rrrr}
-27+39i, & 15+45i, & 45+15i, & 39-27i \\
27-39i, & -15-45i, & -45-15i, & -39+27i \\
-39-27i, & -45+15i, & -15+45i, & 27+39i \\
39+27i, & 45-15i, & 15-45i, & -27-39i
\end{array}$$

Que corresponden a los puntos:

$$\begin{array}{rrrr}
(-27,39) & (15,45) & (45,15) & (39,-27) \\
(27,-39) & (-15,-45) & (-45,-15) & (-39,27) \\
(-39,-27) & (-45,15) & (-15,45) & (27,39) \\
(39,27) & (45,-15) & (15,-45) & (-27,-39)
\end{array}$$

Problema 6.0.13. *Para qué valores de r podemos construir circunferencias centradas en $(0,0)$ y que tengan algún punto de la retícula.*

De forma natural surgen problemas cuya resolución está aún muy lejos de encontrarse, pero que nos permite ensayar y hacer experimentos sobre el comportamiento de las circunferencias y los números primos.

Pascual Jara. Departamento de Álgebra. Universidad de Granada

Alumnos Estalmat-Andalucía. Oriental

.